# גרף חופשי מהעתקים

## ספירת העתקים

בהינתן שני גרפים G ו-H, נרצה לדעת כמה פעמים H מופיע בתוך G, כלומר כמה העתקים של H ניתן למצוא בתוך G. לא נרצה לספור העתק שהוא אוטומורפוזי להעתק אחר שכבר ספרנו.

*שאלה זו חשובה מפני שיכולה לעזור לנו למצוא תבניות בתוך דאטה כלשהו. לדוגמה, לזהות התקפות סייבר בדאטה של תעבורת רשת, או לזהות מחלות בדאטה של רצף DNA. כעקרון מסתבר שככל שבדאטה גדול יותר כך ימצאו יותר תבניות.*

### בגרף שלם

נסמן ב- את קבוצת כל העתקים של H בתוך הגרף השלם עם n צמתים . מספר העתקים השונים ב-:

כאשר הוא מספר המופעים האוטומורפוזיים של H.

## גרף חופשי מהעתקים

הגדרה: בהינתן שני גרפים G ו-H, נאמר ש-G הוא H-free אם אינו מכיל אף העתק של H.

נסמן שתי פונקציות מיוחדות בהקשר זה:

* – זוהי פונקציה שעבור כל מספר טבעי n וגרף H מחזירה את המספר המקסימלי של צלעות אפשריות בגרף עם n צמתים שהוא H-free. פונקציה זו נקראת external function או Turan number.
* – זוהי פונקציה שעבור כל מספר טבעי n וגרף H מחזירה את קבוצת כל הגרפים האפשריים עם n צמתים שהם H-free וגם מספר הצלעות בהם הוא .

## משפט **Mantel**

משפט Mantel עונה על השאלה מהו , כלומר כמה צלעות אפשריות יכולת להיות בגרף עם n צמתים בלי שייווצר משולש, וכן מהו . לפי משפט Mantel:

1. לכל מתקיים .
2. . כלומר, הגרף היחיד שחופשי ממשולשים ועם צלעות הוא הגרף הדו-צדדי המאוזן והמלא.

### הוכחת חלק 1

**חסם תחתון - .** בגרף דו-צדדי אין מעגלים באורך אי-זוגי, ולכן לא יכול להיות משולש. בגרף הדו-צדדי המלא יש לכל היותר צלעות.

**חסם עליון - .** נציג 4 הוכחות שונות:

1. באינדוקציה על מספר הצמתים. נגדיר גרף G עם n צמתים שבו אין משולשים ומספר צלעות מקסימלי. נבחר צלע שרירותית , ונגדיר . נשים לב כי מספר הצלעות ב-G הוא מספר הצלעות ב-G' ועוד כל הצלעות בין הצמתים x ו-y שהורדנו לשאר הצמתים ב-G', ועוד הצלע . מכאן נקבל:

כאשר האי שוויון הראשון נובע מהנחת האינדוקציה ומהעובדה שב-G' אין משולשים ולכן ל-x ול-y לא יכולים להיות שכנים משותפים. מכאן שמספר הצלעות בין x ו-y לשאר הצמתים ב-G' הוא לכל היותר .

1. בעזרת אי-שוויון קושי-שוורץ וספירת מספר ה"דובדבנים" בגרף ללא משולשים (הוכחה מלאה בשקפים).
2. באמצעות אי-שוויון AM-GM. נגדיר גרף G עם n צמתים שבו אין משולשים ומספר צלעות מקסימלי. תהי A תת-הקבוצה הבלתי תלויה הכי גדולה ב-G, ויהי . נשים לב כי כל הצלעות ב-G הן צלעות שיש בהן צומת ב-B, כי A היא בלתי תלויה. בנוסף, השכונה של כל צומת היא בלתי תלויה, מאחר ואין משולשים ב-G, ולכן מספר הצמתים בשכונה של הוא לכל היותר . מכאן נגיע לאי-שוויון הבא:

*האי-שוויון האחרון נובע מאי-שוויון* AM-GM *שאומר: . עבור מקבלים .*

1. *באמצעות משפט* Motzkin-straus. *עבור כל גרף* G *עם* n *צמתים, נגדיר פולינום . נגדיר את ה-*lagrangian *של G להיות , כלומר הפולינום עם הערך המקסימלי שכל המשתנים שלו חיוביים וסכומם 1. נשים לב שאם כל המשתנים שווים , אזי בכל גרף G נקבל: . מכאן שנוכל למצוא חסם תחתון . לפי משפט* Motzkin-straus*, אם* G *חופשי ממשולשים אזי . לכן בכל גרף חופשי ממשולשים מתקיים: . באמצעות העברת אגפים נקבל את משפט* Mantel*.*

### הוכחת חלק 2:

נובע מההוכחה השלישית מחלק 1. נמשיך את ההוכחה השלישית עם משפט 1 ונקבל:

לפי משפט AM-GM מתקיים אם ורק אם . בנוסף, B חייבת להיות גם כן בלתי תלויה מאחר ואם היה צלע בין שני צמתים מ-B היינו מקבלים שב-G יש יותר צלעות מ*-. ולכן G היא בהכרח הגרף .*

## משפט Turan

זהו הכללה של משפט Mantel. עונה על השאלה מהו , כלומר כמה צלעות אפשריות יכולת להיות בגרף עם n צמתים בלי שייווצר קליקה בגודל r, וכן מהו . לפני שניגש למשפט וההוכחה, יש קודם להסביר מהו גרף Turan.

### גרף Turan

עבור , נגדיר את גרף Turan, בסימון , להיות:

* *אם*
* *גרף r-צדדי שלם ומאוזן אם .*

*גרף r-צדדי שלם ומאוזן הוא גרף שמחולק ל-*r *קבוצות בלתי תלויות, , כך שבין כל הקבוצות יש את כל הצלעות האפשריות. המוטיבציה שלנו בגרפים מסוג זה היא שגרף* Turan *אינו מכיל אף העתק של , ולכן מספר הצלעות בו יכול לשמש כחסם תחתון ל-. כדי למקסם את מספר הצלעות אנו דורשים שהגרף ה-r-צדדי יהיה שלם ומאוזן. מספר הצמתים בכל קבוצה בלתי תלויה היא:*

כלומר, בכל קבוצה בת"ל יש או צמתים.

נסמן את מספר הצלעות בגרף Turan כך . יש 4 דרכים כיצד לספור את :

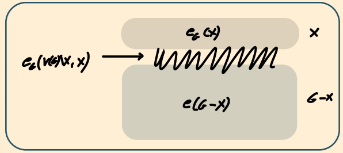
1. . מורידים מסך כל הצלעות האפשריות מספר הצלעות האפשריות בכל קבוצה בת"ל.
2. . סכימה של כל הצלעות בין כל שני קבוצות בת"ל אפשריות.
3. . באמצעות פתיחת המשוואה .
4. . סך כל הצלעות שיש בגרף שבו הורדנו r צמתים, אחת מכל קבוצה בת"ל, ועוד סך הצלעות שיש בין הגרף שנשאר לקבוצה שהורדה, ועוד כל הצלעות בקבוצה שהורדה.

### משפט Turan

1. לכל מתקיים .
2. . כלומר, גרף Turan הוא הגרף שממקסם את מספר הצלעות ואין בו .

### הוכחת חלק 1

מעצם בניית גרף Turan כבר ידוע שמתקיים . נוכיח באינדוקציה על n:

עבור גרף Turan הוא ולכן הטענה טריוויאלית. נניח שהטענה נכונה עבור ונוכיח עבור n. יהי , ויהי קבוצת צלעות בגודל r, כך שיוצרת גרף מושרה שהוא איזומורפי ל-. נוכל לחשב את מספר הצלעות ב-G בדרך הבאה: (ראה תמונה).

לפי הנחת האינדוקציה, מספר הצלעות ב-G-X קטן מ-. בנוסף, כיוון שב-G אין קליקה *, אזי כל צומת ב-*  ניתן *לחבר לכל היותר לכל הצמתים ב-X מלבד 1. ולכן . נסכום הכל ונקבל:*

## Turan density -

לפני שנגדיר מהו Turan density נגדיר קודם מהו edge density.

**Edge density** - נחשב צפיפות צלעות גרף G עם n צמתים כך . זהו ערך בין 0 ל-1 שמייצג את ההסתברות שצלע אקראית קיימת בגרף. גרף עם לפחות צלעות, כאשר ואינו תלוי ב-n, נאמר שיש לו "positive density".

**הגדרה**: עבור גרף H כלשהו, נגדיר Turan density של H, בסימון , להיות:

זהו edge density של גרפים שיש בהם n צמתים, כאשר n שואף לאינסוף, אין בהם עותק של H ומספר הצלעות בהם מקסימלי. נשים לב שעבור גרף (איזומורפי ל-), מתקיים שה-Turan density שלו הוא: .

### טענת עזר

עבור גרף G עם n צמתים שיש לו edge density של מתקיים: *. משפט זה אומר ש*צפיפות הצלעות הממוצעת של כל התתי גרפים המושרים ב-G שיש להם m צמתים שווה ל-.

הוכחה:

השוויון הראשון נובע מהוצאת מהסכום. השוויון השני נובע מכך שעבור כל צלע ב-, אם מקבעים אותה אז נותר לבחור m-2 צמתים ב-U מתוך n-2 צמתים שנותרו. השוויון השלישי נובע מהזהות הקומבינטורית .

### קיימות

משפט: לכל גרף H, אזי קיים.

הוכחה: מספיק להוכיח שהסדרה  *מונוטונית יורדת, כלומר שמתקיים . נניח בשלילה שהטענה לא נכונה ולכן . יהי גרף G עם n צמתים שהוא חופשי מהעתקים של H וגם מספר הצלעות בו הוא . אזי לפי טענת עזר,* ה-edge density הממוצע של כל התתי גרפים המושרים ב-G שיש להם צמתים שווה ל-*. בפרט זה אומר שקיים גרף מושרה , שיש בו n-1 צמתים והוא חופשי מהעתקים של H, שה-*edge density *שלו גדול או שווה ל-, שהוא לפי הנחה בשלילה גדול מ-. מכאן שמספר הצלעות ב- גדול מ-. סתירה!*

### מהו

משפט Erdos-Stone-Simonovits: לכל גרף H מתקיים:

כאשר הוא המספר הכרומטי של H, המייצג את מספר הצבעים המינימלי שבהם אפשר לצבוע את הצמתים של H מבלי ששני צמתים שביניהם יש צלע יהיו בצבע זהה. המספר הכרומטי הוא בעצם המספר המינימלי של קבוצות בת"ל. נשים לב, שעבור גרף דו-צדדי H, שבו , יוצא ממשפט זה ש-. כלומר, שקיים n כך שכל גרף עם n צמתים ו-edge density של , מכיל עותק של הגרף הדו-צדדי H.

ניסוח כמותי של משפט זה:

הוכחה: נוכיח את הניסוח הכמותי בשני חלקים:

1. חסם תחתון – נוכיח כי . נשים לב כי בגרף בוודאי אין עותק של H. ולכן
2. חסם עליון – נוכיח כי .

נשתמש במשפט Erdos-Stone, האומר כי לכל קיים כך שלכל , אם ב-G יש n צמתים ולפחות  *צלעות, אזי . הגרף זהו הגרף המחולק ל-*r *קבוצות בלתי תלויות, כך שכל קבוצה בלתי תלויה היא בגודל t.*

*נניח בשלילה כי . אזי לפי משפט עזר נוכל לבחור ו-, ונקבל שקיים n עבורו כל גרף מכיל את , שבוודאי מכיל H. סתירה!*

## Supersaturation

עד כה למדנו שבגרף G עם n צמתים ופחות מ-צלעות, קיימים גרפים שאין בהם אף עותק של H. אך מה קורה כאשר יש יותר צלעות ב-G?

**משפט**: לכל גרף H ו-, קיימים כך שלכל , בהינתן גרף G עם n צמתים ולפחות  *צלעות, אזי G מכיל לפחות עותקים של H.* זהו מספר העתקים המקסימלי של H.

במילים אחרות, כאשר ב-G יש יותר צלעות מאשר הסף , אפילו אם זה לא הרבה צלעות יותר, אזי G מכיל בוודאות המון עותקים של H. מצב זה נקרא Supersaturation (רוויה).

**הוכחה**: יהי H ו- *נתונים. מכך שאנו יודעים שהגבול קיים, אזי גם קיים איזשהו כך ש-, כלומר כל גרף עם* m *צמתים ולפחות צלעות מכיל עותק של H. נגדיר וגרף* G *המקיים .*

כעת נגדיר קבוצה המכילה את כל התתי גרפים ב-G שיש להם m צמתים ומכילים עותק של H. נספור כמה תתי גרפים יש ב-C. ראשית נמצא חסם עליון ותחתון ל-.

*במשוואה הראשונה, המעבר הראשון נובע מכך שכשמקבעים כל צלע נותר לבחור עוד צמתים מתוך . המעבר השלישי נובע מהגדרת , והמעבר האחרון מהזהות* הקומבינטורית . *נאחד את שני הגבולות, נפתח סוגריים, נעביר אגפים, נוציא מכנה משותף ונקבל:*

*כל עותק של* H *יכול להופיע בלכל היותר תתי גרפים ב-*C*. מכאן נוכל לחשב את מספר העותקים השונים ב-*C*:*

המעבר האחרון נובע מהזהות . נגדיר *, ונקבל:*

## גרף אקראי בינומי

נסמן ב- את התפלגות כל הגרפים שיש להם n צמתים וההסתברות להופעת צלע כלשהי היא p. נסמן גרף שנדגם מתוך . ההסתברות לבחור גרף מסוים G היא *, בדומה לנוסחת התפלגות בינומית.*

*משפט* Multiround Exposure: *יהי כך שמתקיים , אזי ההתפלגות וההתפלגות זהים. כלומר ההסתברות לדגום גרף G כלשהו משני התפלגויות אלו היא זהה. במידה וגם מתקיים , אזי .*

### תכונות גרפים אקראיים

בהינתן תכונה P נרצה לדעת מהו , כלומר נרצה לדעת האם גרף טיפוסי ב-שייך ל-P. ישנם שלושה אפשרויות מעניינות:

1. אם הגבול שואף ל-1 אז נאמר שהגרף הטיפוסי ב- באופן "אסימפטוטי כמעט וודאי" (בקיצור a.a.s) שייך ל-P.
2. אם הגבול שואף ל-0 אז נאמר שהגרף הטיפוסי ב- a.a.s אינו שייך ל-P.
3. אם הגבול שואף לכל ערך אחר אזי לא נוכל להסיק כלום על שייכות ל-P.

### משתנה אקראי לספירת עותקים

יהי גרף אקראי . עבור כל עותק של H , נסמן אינדיקטור השווה 1 אם ו-0 אחרת.

נסמן משתנה מקרי , הסופר את מספר העתקים של H בגרף אקראי G. נחשב תוחלת של :

המעבר הראשון נובע מליניאריות של התוחלת, המעבר השני מממוצע משתנה ברנולי, והמעבר האחרון ממשפט בסעיף א'.

### מתי אין עותקים

*באמצעות התוחלת של ואי-שוויון מרקוב, נוכל לחשב עבור איזה ערך של p בגרף* טיפוסי ב- *אין אף עותק של H.*

*אם אזי מהחישוב לעיל . לכן בגרף* באופן "אסימפטוטי כמעט וודאי" *אין אף עותק של* H *אם .*

## הופעת משולשים בגרף אקראי

לפי משפט אחרון, בגרף אקראי , כאשר , אין אף משולש באופן אסימפטוטי כמעט וודאי. אמנם מה קורה כאשר ?

משפט עזר: עבור משתנה אקראי z שהוא סכום של אינדיקטורים, , *באמצעות הפעלת אי-שוויון צ'בישב* מתקיים:

*נשתמש במשפט עזר כדי לחשב מה ההסתברות שב- אין אף משולש:*

*לפי הנחה , ואז האיבר השמאלי שואף ל-0. באיבר הימני, השונות המשותפת של תהיה שונה מ-0 אם ורק אם הם חולקים בדיוק צלע אחד. במקרה כזה:*

*מספר המשולשים שחולקים צלע אחד הוא לכל היותר . נמשיך את החישוב:*

*כיוון שאנו מניחים אזי מהחישוב לעיל . לכן בגרף* באופן "אסימפטוטי כמעט וודאי" *קיים משולש* *אם .*

***לסיכום****: כאשר אזי כמעט בטוח שאין משולש אך כאשר כמעט בטוח שיהיה משולש. נמצא אם כן שחלון הערכים של* p *באזור מהווה כמין סף* (threshold) *למעבר בשייכות לתכונה . מכאן נגיע להגדרה חדשה בסעיף הבא.*

## Threshold

*הגדרה: יהי* P *תכונה מונוטונית עולה, נאמר כי הוא* threshold עבור P אם*:*

*נשים לב כי אם הוא* threshold *עבור* P*, אזי גם כל פונקציה מ- היא* threshold *עבור* P*.*

***משפט* Bollobas & Thomasson**: *לכל תכונה מונוטונית יש* threshold*.*

### Threshold עבור

*יהי , אזי הוא* threshold *עבור התכונה .*

* עבור תכונת הכלה של גרף העפיפון, ה- thresholdהוא .

## ספירת העתקים של

**משפט supersaturation ל-**: לכל קיים כך שלכל מתקיים: אם G הוא גרף עם n צמתים ולפחות צלעות, אזי ב-G יש לפחות  *העתקים מתויגים של ולפחות העתקים לא מתויגים של .*

*נשים לב כי בגרף אקראי מתקיים , כלומר התוחלת של מספר העתקים של , בגרף אקראי שמתפלג , גם כן תלוי .*

## מספר טוראן לגרף דו-צדדי שלם -

ננסה להכליל את המסקנה מסעיף קודם לכל גרף דו-צדדי שלם ( הוא מקרה פרטי של (.

### חסם עליון - משפט Kovari-Sos-Turan

לכל כאשר קיים קבוע כך שמתקיים: *.* כלומר מספר הצלעות המקסימלי שיכול להיות בגרף בלי שייווצר עותק של הוא .

**הוכחה:**

יהי G גרף עם n צמתים ומעל צלעות. נניח בשלילה כי ב-G אין אף עותק של . ננסה למצוא את מספר העותקים הלא מתויגים של ב-G. נסמן מספר זה ב-.

*חסם תחתון – לכל צומת בגרף נעבור על כל הקבוצות בגודל s בשכונה שלה.*

האי-שוויון השני נובע מאי שוויון Jensen. השוויון השלישי נובע ממשפט . האי שוויון הרביעי מהנחה. האי-שוויון החמישי מהזהות .

חסם עליון – לכל קבוצה בגודל s יכולים להיות לכל היותר שכנים שונים, שאם לא כן אזי בגרף היה עותק של .

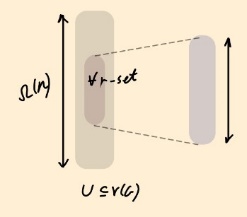
האי שוויון האחרון נובע מהזהות .

*נאחד את שני הגבולות ונקבל . ומכאן . אולם במשוואה זו יש רק ערכים מקובעים. לכם נוכל לבחור* C *שמקיים ונקבל סתירה!*

### חסם תחתון

לכל קיימים קבועים ו-, כך שלכל מתקיים: *.*

**מסקנה**: משפט Kovari-Sos-Turan נותן חסם הדוק ל-. ומכאן שגרפים שאין בהם עותקים של הם דלילים במובן שאין בהם יותר מ- צלעות.



## בחירה אקראית תלויה (d.r.c)

**משפט**: יהי G גרף עם n צמתים ולפחות צלעות כאשר . אזי לכל קיים , כאשר , כך שכל תת-קבוצה של U שהיא בגודל r יש קבוצה של שכנים משותפים בגודל לפחות .

### שיפור למשפט Kovari-Sos-Turan באמצעות d.r.c

נמצא שיפור למשפט Kovari-Sos-Turan במובן שנמצא חסם עליון למספר טוראן בכל גרף דו-צדדי ולא רק בגרף דו-צדדי שלם שבו .

משפט: יהי H גרף דו-צדדי שרירותי. אזי קיים קבוע כך שמתקיים . זוהי הדרגה הגבוהה ביותר ב-H. משפט זה אינו נותן חסם עליון טוב יותר מאשר Kovari-Sos-Turan במקרים שבהם שייך.

הוכחה: יהי גרף דו-צדדי. יהי גרף G עם n צמתים ולפחות צלעות כך שמתקיים וגם . יהי גרף דו-צדדי הפורש את G שמספר הצלעות בו לפחות חצי מ-G, . נוכיח שעותק של H מופיע ב-.

לפי משפט d.r.c, נגדיר ו-, נקבל שקיימת תת-קבוצה כך ש:

כמו כן, בכל תת-קבוצה של U שהיא בגודל יש קבוצה של שכנים משותפים בגודל לפחות:

כיוון ש- נוכל לשכן את A בתוך U היכן שנרצה. כדי לשכן את B נעבור על צומת ב-B כך שלכל , נניח כי כבר שיכנו את . נרצה לשכן את . נשים לב כי השכנים של נמצאים ב-A והם לכל היותר . לכן לפי המשפט לעיל יש להם לפחות שכנים משותפים ב-G'. אולם כיוון שעד כה שיכנו לכל היותר צמתים ב-G', אזי יש צומת פנויה מקבוצת שכנים משותפים אלו לבחור בה את . כיוון שנוכל להגדיר כך את לכל נוכל לשכן את B כולו ב-. מ.ש.ל.

## מספרי רמזי

עד כה עסקנו בשאלה כמה צלעות ניתן להכניס בגרף עם מספר קבוע של צמתים כך שיש אפשרות שלא יופיע בו עותק של תת-גרף. מספרי רמזי עוסקים בשאלה כמה צמתים צריכים להיות בגרף כדי שבוודאות יהיה בו או במשלים שלו עותק של תת-גרף אחד או יותר. סדרות מספרי רמזי תלויים בכמה עותקים מחפשים.

### מספרי רמזי ל-2 צבעים

**הגדרה**: לכל נגדיר את מספר רמזי, בסימון , להיות המספר הקטן ביותר כך שכל גרף שלם עם n צמתים שכל צלעותיו צבועות בשני צבעים מכיל עותק של בצבע הראשון או עותק של בצבע השני.

כאשר בגרף הצבוע בשני צבעים יש עותק של בצבע הראשון או עותק של בצבע השני, נסמן .

**משפט** **רמזי**: לכל .

### מספרי רמזי ל-2 צבעים - סימטרי

סדרת מספרי רמזי כאשר נקראת "מספרי רמזי אלכסוניים". נוכל להגדיר אותם בשני דרכים:

**הגדרה 1**: לכל נגדיר את מספר רמזי, בסימון , להיות המספר הקטן ביותר, כך שהגרף השלם עם n צמתים שצלעותיו צבועות בשני צבעים, מכיל עותק של בצבע הראשון או בצבע השני.

**הגדרה 2**: לכל נגדיר את מספר רמזי, בסימון , להיות המספר הקטן ביותר, כך שכל גרף G עם n צמתים מקיים או .

**משפט** **רמזי**: לכל . כלומר קיים כך שלכל  *בכל גרף G עם n צמתים אזי*  או .

### מספרי רמזי ל-r צבעים

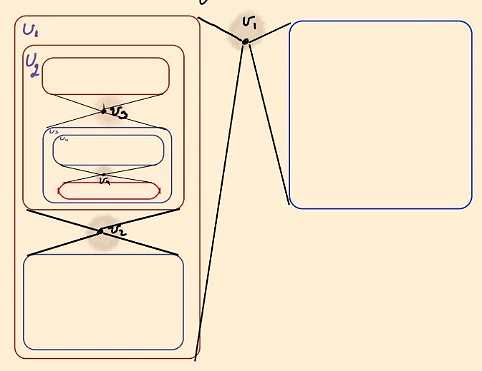
**הגדרה**: בהינתן הגרפים , נגדיר את מספר רמזי, בסימון , להיות המספר הקטן ביותר, כך שבכל שצלעותיו צבועות ב-r צבעים, קיים כך ש- מכיל עותק של בצבע ה-i.

כאשר בגרף הצבוע ב-r צבעים יש עותק של בצבע ה-i נסמן . אם לכל נסמן .

**משפט** **רמזי**: לכל , .

### חסם תחתון למספרי רמזי אלכסוניים

**משפט**: לכל מתקיים .

**הוכחה**: נגדיר . נרצה להוכיח ש- הצבוע בשני צבעים, נניח כחול ואדום, מכיל עותק של בצבע הכחול או האדום. נשים לב כי . נגדיר סדרה של צמתים כך שלכל יש קבוצה של צמתים . ראשית, נגדיר את להיות צומת אקראית. נחלק את קבוצת השכנים של לשניים, אלו שיש אליהם צלע כחולה ואלו שיש אליהם צלע אדומה. נגדיר את להיות הקבוצה הגדולה מבין השניים.

כעת, לכל נגדיר את להיות צומת אקראית בתוך . נחלק את קבוצת השכנים של בתוך לשניים, אלו שיש אליהם צלע כחולה ואלו שיש אליהם צלע אדומה. נגדיר את להיות הקבוצה הגדולה מבין השניים. בנוסף, נגדיר את להיות צומת אקראית בתוך . כיוון ש-*, אזי ולכן מובטח צומת כזאת.*

לכל נגדיר להיות כחול אם נבחר לפי רוב צלעות כחולות ואדום ההיפך*. נגדיר את להיות הצבע שמופיע הכי הרבה פעמים בסדרה . מספר הפעמים שהצבע c מופיע גדול מ-.*

*ניקח את כל הצמתים ב- שהבחירה עבור שלהם נעשתה לפי הצבע . יש לפחות צמתים כאלו. ביחד עם קיבלנו t צמתים שמהווים קליקה וכל הצלעות ביניהם הם בצבע אחד . מ.ש.ל.*

### חסם עליון למספרי רמזי אלכסוניים

**משפט**: אם אזי . במילים אחרות .

**הוכחה**: יהי n המקיים . נרצה להוכיח כי הצבוע בשני צבעים אינו בהכרח מכיל עותק של באחד מהצבעים. נשים לב כי בחירת צביעת צלעות של בשני צבעים מקבילה ליצירת גרף אקראי מהתפלגות . נחשב את ההסתברות ש- או במשלים שלו. נזכור ששני מאורעות אלו הם בלתי תלויים.

*כיוון שאנו מניחים אזי מאורע זה לא בוודאות יקרה.*

## Ramsey Supersaturation

למדנו כי בגרף הצבוע ב-r צבעים, קיים כך שבהכרח מכיל לפחות עותק אחד של בצבע ה-i. כעת נלמד כי למעשה הוא מכיל הרבה עותקים.

**משפט**: לכל קיימים כך שלכל , בכל צביעה של ב-r צבעים קיים כך שיש לפחות עותקים של בצבע i. זהו מספר העתקים המקסימלי של ב-.

**הוכחה**: נגדיר ו-. יהי . נגדיר צביעה שרירותית ב-r צבעים ב-. לפי משפט רמזי בכל , צמתים ב-, קיים כך ש- מכיל לפחות עותק אחד של בצבע ה-i. לכן, לפי עיקרון שובך היונים, חייב להיות צבע כלשהו כך ש- מכיל לפחות עותקים של בצבע i, אולם עותקים אלו יכולים להיות זהים. כל עותק של נספר לכל היותר . לכן מספר העותקים השונים של ב- *בצבע* i*, הוא לפחות:*

כאשר המעבר מתבצע באמצעות הזהות . כיוון ש- הטענה מתקיימת.

### Ramsey Supersaturation עבור משולשים – משפט גודמן

ננסה למצוא מספר עותקים של משולשים בגרף הצבוע בשני צבעים.

**משפט גודמן**: יהי ויהי צבוע בשני צבעים, אדום וכחול. יהי G הגרף המושרה ב- *שמכיל את כל הצלעות האדומות בלבד. אזי מספר המשולשים המונוכרומטיים (צבועים בצבע אחד) ב- הוא:*

**הוכחה**: נוכיח באמצעות ספירה כמה פעמים מופיע כל משולש אפשרי בסכום לעיל.

כל משולש אדום נספר באיבר הראשון בסוגריים שלוש פעמים, באיבר השני אפס פעמים, ובאיבר השלישי פעם אחת. סה"כ *. אותו הדבר עבור משולש כחול. עבור משולש עם שני צלעות אדומות וצלע אחת כחולה, אזי נספור אותו פעם אחת באיבר הראשון, אפס פעמים באיבר השני ופעם אחת באיבר השלישי. סה"כ . אותו הדבר עבור המקרה ההפוך. לסיכום, נספור כל משולש מונוכרומטי ב- בדיוק פעם אחת.*

*באמצעות משפט גודמן נוכל להגיע לחסם נוח יותר.*

***משפט****:* יהי ויהי צבוע בשני צבעים. *אזי .*